A

Optimisation convexe déterministe

On s'intéresse aux deux problèmes suivants :
- Optimisation sans contraintes explicites

$$\min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} J(u) \; ; \tag{A.1}$$

- Optimisation avec contraintes explicites

$$\min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} J(u) \quad \text{sous} \quad \Theta(u) \in -C \; . \tag{A.2}$$

On va sur ces deux problèmes rappeler les principales notions utilisées en optimisation convexe, les résultats d'existence et d'unicité des solutions ainsi que leur caractérisation. Pour les problèmes avec contraintes, on introduira la théorie de la dualité et on donnera aussi quelques algorithmes pour le calcul des solutions. On présentera succinctement le lagrangien augmenté ainsi que ses propriétés de régularisation. On donnera pour conclure les propriétés de différentiabilité des fonctions résultant d'une opération d'optimisation.

A.1 Notions et propriétés élémentaires

A.1.1 Espaces et ensembles.

- $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ sont des espaces de *Hilbert* (espace vectoriel normé complet dont la norme dérive d'un produit scalaire). Des exemples typiques sont :
  - en dimension finie : $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \; ,$$

  - en dimension infinie : $L^2([0,T],\mathbb{R})$ le produit scalaire étant :

$$\langle x, y \rangle = \int_0^T x(t) y(t) \mathrm{d}t \; .$$

– $U^{\mathrm{ad}} \subset \mathbb{U}$ est un ensemble *convexe* :

$$\forall (u_1, u_2) \in U^{\mathrm{ad}} \times U^{\mathrm{ad}},\ \forall \alpha \in [0,1],\ \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2 \in U^{\mathrm{ad}} ,$$

que l'on supposera *fermé*.

– $C \subset \mathbb{V}$ est un *cône* :

$$\forall \alpha > 0 , \quad v \in C \Rightarrow \alpha v \in C ,$$

que l'on supposera *convexe*, *fermé*, saillant : $C \cap (-C) = \{0\}$.
Le *cône dual* $C^\star$ de C est défini par :

$$C^\star = \{p \in \mathbb{V},\ \langle p, v \rangle \geq 0,\ \forall v \in C\} .$$

Exemples dans le cas $\mathbb{V} = \mathbb{R}^m$:
– contraintes égalité : $C = \{0\}$, $C^\star = \mathbb{R}^m$;
– contraintes inégalité : $C = \mathbb{R}^m_+$, $C^\star = \mathbb{R}^m_+$.

A.1.2 Critère.

Soit $J : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle domaine de J et l'on note $\mathrm{dom}J$ l'ensemble :

$$\mathrm{dom}J = \{u \in \mathbb{U},\ J(u) < +\infty\} .$$

On suppose que J est une fonction *propre*[1], et qu'elle vérifie les hypothèses suivantes :

– condition de convexité :

J *convexe* :

$$J(\alpha u_1 + (1-\alpha) u_2) \leq \alpha J(u_1) + (1-\alpha) J(u_2) ,$$

J *strictement convexe* :

$$J(\alpha u_1 + (1-\alpha) u_2) < \alpha J(u_1) + (1-\alpha) J(u_2) ,$$

J *fortement convexe* :

$$J(\alpha u_1 + (1-\alpha) u_2) \leq \alpha J(u_1) + (1-\alpha) J(u_2) - \frac{a}{2} \alpha (1-\alpha) \|u_1 - u_2\|^2 ,$$

– condition de continuité :

J *semi-continue inférieurement (s.c.i.)* :

$$\liminf_{u \to u_0} J(u) \geq J(u_0) ,$$

1. J est propre si elle n'est pas *identiquement égale* à $+\infty$ ($\mathrm{dom}J \neq \emptyset$), et si elle ne prend *jamais* la valeur $-\infty$.

J continue :

$$\lim_{u \to u_0} J(u) = J(u_0) \ ,$$

J lipschitzienne :

$$|J(u_1) - J(u_2)| \leq L\|u_1 - u_2\| \ ,$$

– condition de différentiabilité [2] :
J sous-différentiable :

$$\partial J(u_0) = \{r \in \mathbb{U},\ \forall u,\ J(u) - J(u_0) \geq \langle r, u - u_0 \rangle\} \neq \emptyset \ ,$$

J Gâteaux-différentiable :

$$\exists\, \nabla J(u_0) \in \mathbb{U},\ \forall d \in \mathbb{U}, \lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(u_0 + \epsilon d) - J(u_0)}{\epsilon} = \langle \nabla J(u_0), d \rangle \ ,$$

J Fréchet-différentiable :

$$\exists\, \nabla J(u_0) \in \mathbb{U},\ \lim_{u \to u_0} \frac{J(u) - J(u_0) - \langle \nabla J(u_0), u - u_0 \rangle}{\|u - u_0\|} = 0 \ ,$$

– condition comportement à l'infini :
J coercive sur U^{ad} :

$$\lim_{\substack{u \in U^{\mathrm{ad}} \\ \|u\| \to +\infty}} J(u) = +\infty \ .$$

A.1.3 Contraintes

$\Theta\ :\ \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{V}$ est une fonction qui vérifie des hypothèses de même nature que le critère J, mais adaptées au fait que Θ est à valeurs dans un cône :
– condition de convexité :
Θ *C-convexe* :

$$\Theta(\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2) - \alpha \Theta(u_1) - (1 - \alpha)\Theta(u_2) \in -C \ ,$$

– condition de continuité :
Θ *continue* :

$$\lim_{u \to u_0} \Theta(u) = \Theta(u_0) \ ,$$

Θ *lipschitzienne* :

$$\|\Theta(u_1) - \Theta(u_2)\| \leq \tau \|u_1 - u_2\| \ ,$$

– condition de différentiabilité :

2. La notation $\nabla J(u_0)$ désigne le *gradient* de J au point u_0.

Θ *C-sous-différentiable* :

$$\partial\Theta(u_0) = \{\theta \in \mathcal{L}(\mathbb{U},\mathbb{V}),\ \forall u,\ \Theta(u) - \Theta(u_0) - \theta.(u - u_0) \in C\}\ ,$$

Θ *Gâteaux-différentiable* :

$$\exists \Theta'(u_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{U},\mathbb{V}),\ \forall d,\ \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\Theta(u_0 + \epsilon d) - \Theta(u_0)}{\epsilon} = \Theta'(u_0)\cdot d\ .$$

Remarque A.1. On notera que la condition de C-convexité est équivalente à supposer que l'application $u \mapsto \langle p, \Theta(u)\rangle$ est convexe pour tout $p \in C^\star$. On pourrait donc donner directement la condition de continuité sur cette dernière fonction, et par exemple considérer une hypothèse de semi-continuité inférieure, plus faible que celles proposées précédemment. Dans le même esprit, on pourrait remplacer l'hypothèse de *C-sous-différentiabilité* par une hypothèse de sous-différentiabilité sur la fonction $u \mapsto \langle p, \Theta(u)\rangle$. Il y aurait alors cependant une condition technique supplémentaire de *régularité du sous-différentiel* à assurer.

A.2 Principaux résultats d'optimisation

A.2.1 Optimisation sans contraintes explicites

On cherche à donner une réponse aux problèmes de l'*existence*, de l'*unicité*, de la *caractérisation* et du *calcul* de la solution du problème (A.1).

- **Existence.** En *dimension finie*, il suffit de supposer que la fonction J est s.c.i. et que l'ensemble U^{ad} est non vide, fermé et borné (ou, à défaut de U^{ad} borné, que J est coercive) pour avoir l'existence de solutions [3].
- **Unicité.** L'unicité s'obtient en ajoutant aux hypothèses d'existence le fait que la fonction J soit strictement convexe et que l'ensemble U^{ad} soit convexe.
- **Caractérisation.** On se place dans le cas J convexe et U^{ad} convexe, et on suppose en plus des hypothèses d'existence que J est Gâteaux-différentiable. Une condition *nécessaire et suffisante* pour que $u^\sharp$ soit solution est que l'inégalité variationnelle suivante soit vérifiée :

$$\langle \nabla J(u^\sharp), u - u^\sharp\rangle \geq 0\ \forall u \in U^{\mathrm{ad}}\ .$$

  Dans le cas sans contraintes ($U^{\mathrm{ad}} = \mathbb{U}$), cette condition prend la forme bien connue : $\nabla J(u^\sharp) = 0$. Dans le cas avec contraintes, cette inéquation variationnelle n'est en général pas d'un grand intérêt pratique…

3. En dimension infinie, on fait des hypothèses supplémentaires de convexité afin de pouvoir garantir l'existence.

- **Calcul.** On suppose de plus que J est fortement convexe (de module a) et que sa différentielle ∇J est lipschitzienne (de constante A). Alors, la suite $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ engendrée par l'algorithme itératif :

$$u^{(k+1)} = \mathrm{proj}_{U^{\mathrm{ad}}}\left(u^{(k)} - \rho \nabla J(u^{(k)})\right) \ ,$$

converge vers l'unique solution $u^\sharp$ du problème, pourvu que $\rho \in \left]0, \frac{2a}{A^2}\right[$.

A.2.2 Optimisation avec contraintes explicites et dualité

Dans le cas du problème (A.2), on peut se ramener au cas précédent en posant :

$$U^{\mathrm{co}} = \{u \in \mathbb{U},\ \Theta(u) \in -C\} \ ,$$

et en effectuant la minimisation sur l'ensemble $U^{\mathrm{ad}} \cap U^{\mathrm{co}}$ (supposant que le cône C est un convexe fermé, l'ensemble U^{co} est fermé (resp. convexe) dès que Θ est continue (resp. C-convexe)). Cependant, effectuer une opération de projection revient en toute généralité à résoudre un problème d'optimisation, et c'est pourquoi on n'effectue cette opération que pour des contraintes de forme simple (contrainte de borne ou contraintes linéaires). Pour des contraintes plus complexes, l'utilisation de leur expression analytique permet souvent de donner une meilleure caractérisation des solutions du problème et de disposer d'algorithmes de calcul efficaces.

- **Qualification des contraintes et caractérisation.** Outre les hypothèses « classiques » de convexité, continuité et différentiabilité de J et Θ, on doit introduire pour caractériser une solution $u^\sharp$ du problème (A.2) une condition de *qualification des contraintes*. La condition (suffisante) que l'on utilisera est :

$$0 \in \mathrm{int}\left(\Theta(U^{\mathrm{ad}}) + C\right) \ ,$$

à partir de laquelle on retrouve les conditions plus classiques :
Cas $C = \{0\}$: $0 \in \mathrm{int}\left(\Theta(U^{\mathrm{ad}})\right)$.
Cas $C \neq \{0\}$: $\exists u_0 \in U^{\mathrm{ad}},\ \Theta(u_0) \in \mathrm{int}(-C)$.
Une solution $u^\sharp$ du problème (A.2) est caractérisée par l'existence d'un élément $p^\sharp \in C^\star$ appelé *multiplicateur* et vérifiant les conditions de *Karush–Kuhn–Tucker* :

$$\langle \nabla J(u^\sharp) + \left(\Theta'(u^\sharp)\right)^\top \cdot\ p^\sharp, u - u^\sharp\rangle \geq 0 \quad \forall u \in U^{\mathrm{ad}} \ , \tag{A.3a}$$

$$\Theta(u^\sharp) \in -C \quad , \quad p^\sharp \in C^\star \ , \tag{A.3b}$$

$$\langle p^\sharp, \Theta(u^\sharp)\rangle = 0 \ . \tag{A.3c}$$

On notera que la condition des écarts complémentaires est une condition de type *combinatoire*, difficile à exploiter en pratique.

– **Interprétation marginaliste du multiplicateur.** Pour comprendre à quoi correspond le multiplicateur $p^\sharp$, on introduit la *fonction de perturbation* $\Phi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ du problème (A.2) comme la fonction correspondant à la minimisation sous contraintes perturbées :

$$\Phi(v) = \left\{ \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} J(u) \quad \text{sous} \quad \Theta(u) - v \in -C \right\} . \tag{A.4}$$

Sous les hypothèses précédentes, la fonction Φ est sous-différentiable au point $v = 0$ et le multiplicateur $p^\sharp$ des conditions de Karush–Kuhn–Tucker vérifie :

$$-p^\sharp \in \partial \Phi(0) . \tag{A.5}$$

Dans le cas différentiable, le multiplicateur $p^\sharp$ s'interprète, au signe près, comme la *sensibilité du coût optimal par rapport au niveau de contraintes.* Le lien entre la fonction de perturbation et la solution du problème est donné par les relations :

$$\Phi(0) = J(u^\sharp) \qquad \text{et} \qquad \nabla\Phi(0) = -p^\sharp .$$

La fonction de perturbation Φ est à la base de la théorie de la dualité en optimisation convexe. Elle permet de plus une interprétation géométrique simple de cette théorie.

– **Lagrangien et point selle.** On appelle *lagrangien* associé au problème (A.2) la fonction L, définie sur $U^{\mathrm{ad}} \times C^\star$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont l'expression est :

$$L(u, p) = J(u) + \langle p, \Theta(u) \rangle , \tag{A.6}$$

On appelle *saut de dualité* la quantité :

$$\delta = \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} \max_{p \in C^\star} L(u, p) - \max_{p \in C^\star} \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} L(u, p) ,$$

qui est toujours positive ou nulle.

Le couple $(u^\sharp, p^\sharp) \in U^{\mathrm{ad}} \times C^\star$ est appelé *point selle* de L s'il vérifie la double inégalité :

$$\forall (u, p) \in U^{\mathrm{ad}} \times C^\star , \quad L(u^\sharp, p) \leq L(u^\sharp, p^\sharp) \leq L(u, p^\sharp) . \tag{A.7}$$

On montre que si $(u_1^\sharp, p_1^\sharp)$ et $(u_2^\sharp, p_2^\sharp)$ sont des points selle du lagrangien, $(u_1^\sharp, p_2^\sharp)$ et $(u_2^\sharp, p_1^\sharp)$ le sont aussi. L'ensemble $S^\sharp$ des points selle d'un lagrangien se met donc sous la forme d'un *produit cartésien* d'ensembles :

$$S^\sharp = U^\sharp \times P^\sharp .$$

Lorsqu'un lagrangien admet un point selle $(u^\sharp, p^\sharp)$, le saut de dualité est nul et on a l'égalité :

$$\max_{p \in C^\star} \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} L(u, p) = \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} \max_{p \in C^\star} L(u, p) = L(u^\sharp, p^\sharp) . \tag{A.8}$$

On a alors les résultats suivants, caractérisant l'optimalité du point selle :

(1) Si $(u^\sharp, p^\sharp)$ est un point selle de L sur $U^{\mathrm{ad}} \times C^\star$, alors $u^\sharp$ est solution de (A.2).
(2) Si J est convexe s.c.i. propre coercive sur U^{ad}, si Θ est C-convexe et continue et si l'hypothèse de qualification des contraintes est vérifiée, alors le lagrangien L a au moins un point selle sur $U^{\mathrm{ad}} \times C^\star$.

Si on suppose de plus que J et Θ sont différentiables, tout point selle vérifie les conditions de Karush–Kuhn–Tucker.

On définit enfin la *fonction duale* $H : C^\star \mapsto \mathbb{R}$ par la relation :

$$H(p) = \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} L(u, p) \ , \tag{A.9}$$

et l'on note $\widehat{U}(p)$ l'ensemble (indexé par p) des valeurs de u réalisant le minimum dans l'expression (A.9). La recherche de la partie $p^\sharp$ du point selle peut se faire en maximisant la fonction H sur l'ensemble $C^\star$, ce qui est en théorie réalisable car la fonction H est concave et car les contraintes portant sur p (i.e. $p \in C^\star$) sont simples.
Cependant, même pour $p^\sharp \in P^\sharp$, l'élément $u^\sharp$ issu de la minimisation de $L(u, p^\sharp)$ ne correspond pas forcément à la première composante d'un point selle du lagrangien : en effet, on a en général l'inclusion :

$$U^\sharp \subset \widehat{U}(p^\sharp) \ ,$$

qui indique que l'ensemble $\widehat{U}(p^\sharp)$ peut contenir des solutions "parasites" n'ayant rien à voir avec l'ensemble des solutions $U^\sharp$ du problème d'optimisation (A.2). Lorsque l'inclusion ci-dessus est une *égalité* (cas où il n'y a pas de difficulté), on dit que le lagrangien est *stable*.
Dans le cas où la fonction J est *strictement* convexe, la minimisation de $L(u, p^\sharp)$ conduit à une *unique* solution $u^\sharp$ et on a alors $U^\sharp = \widehat{U}(p^\sharp)$ car $\widehat{U}(p^\sharp)$ est réduit à un singleton et car $U^\sharp$ est non vide. Dans ce cas, on peut de plus montrer que la fonction duale H est *différentiable*. Notant $\hat{u}(p)$ l'unique élément de $\widehat{U}(p)$, l'expression du gradient de H au point p est :

$$\nabla H(p) = \nabla_p L\ (\hat{u}(p), p) = \Theta(\hat{u}(p)) \ .$$

– **Calcul.** La différentiabilité de H ouvre la voie aux méthodes de gradient pour le calcul de la composante $p^\sharp$ du point selle. Supposant que J est fortement convexe (de module a) et que Θ est lipschitzienne (de constante τ), l'algorithme d'*Uzawa* consiste à mettre en œuvre un algorithme de gradient à pas fixe pour maximiser la fonction duale H, le calcul du gradient de cette fonction nécessitant la résolution d'un problème de type (A.9). Partant d'un point $(u^{(k)}, p^{(k)}) \in U^{\mathrm{ad}} \times C^\star$, l'itération k de l'algorithme d'Uzawa calcule le point $(u^{(k+1)}, p^{(k+1)})$ par les relations :

$$u^{(k+1)} = \arg\min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} \Big(L(u, p^{(k)}) \Big) \ ,$$

$$p^{(k+1)} = \mathrm{proj}_{C^\star} \Big(p^{(k)} + \rho \nabla_p L\ (u^{(k+1)}, p^{(k)}) \Big) \ .$$

qui se mettent aussi sous la forme :

$$u^{(k+1)} = \arg\min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} \Big(J(u) + \langle p^{(k)}, \Theta(u) \rangle \Big) \ ,$$
$$p^{(k+1)} = \mathrm{proj}_{C^\star} \Big(p^{(k)} + \rho \Theta(u^{(k+1)}) \Big) \ .$$

Cet algorithme converge vers l'unique solution $u^\sharp$ du problème (A.2) avec le choix $\rho \in \left]0, \frac{2a}{\tau^2}\right[$.
Une variante de l'algorithme d'Uzawa consiste à faire un pas de gradient sur la variable u plutôt que la minimisation complète. On obtient alors l'algorithme d'*Arrow–Hurwicz* :

$$u^{(k+1)} = \mathrm{proj}_{U^{\mathrm{ad}}} \Big(u^{(k)} - \epsilon \nabla_u L \ (u^{(k)}, p^{(k)}) \Big) \ ,$$
$$p^{(k+1)} = \mathrm{proj}_{C^\star} \Big(p^{(k)} + \rho \nabla_p L \ (u^{(k+1)}, p^{(k)}) \Big) \ .$$

soit encore :

$$u^{(k+1)} = \mathrm{proj}_{U^{\mathrm{ad}}} \Big(u^{(k)} - \epsilon \Big(\nabla J(u^{(k)}) + \big(\Theta'(u^{(k)}) \big)^\top . \, p^{(k)} \Big) \Big) \ ,$$
$$p^{(k+1)} = \mathrm{proj}_{C^\star} \Big(p^{(k)} + \rho \Theta(u^{(k+1)}) \Big) \ .$$

A.3 Régularisation et lagrangien augmenté

A.3.1 Régularisation de Moreau-Yosida

Soit J une fonction définie sur un espace de Hilbert $\mathbb{U}$ de dimension finie à valeurs dans $\mathbb{R}$, et soit c un coefficient réel strictement positif. On appelle *régularisée de Moreau-Yosida* de J l'application J_c définie sur $\mathbb{U}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$J_c(u) = \min_{v \in \mathbb{U}} \left(\frac{1}{2c} \|v - u\|^2 + J(v) \right) \ . \tag{A.10}$$

À titre d'exemple, on considère la fonction *valeur absolue* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$J(u) = |u| \qquad \Longrightarrow \qquad J_c(u) = \begin{cases} -u - \dfrac{c}{2} & \text{si} \ \ u \leq c \\ \dfrac{u^2}{2c} & \text{si} \ \ -c < u \leq c \\ u - \dfrac{c}{2} & \text{si} \ \ u > c \end{cases} \ .$$

La définition implique de manière évidente que l'on a $J_c(u) \leq J(u) \ \forall u \in \mathbb{U}$. On a en fait beaucoup mieux que cela, comme le montre le théorème suivant.

Théorème A.2.

(a) La régularisée de Moreau-Yosida J_c d'une fonction J convexe s.c.i. propre sous-différentiable est une fonction qui est convexe différentiable de dérivée lipschitzienne, et la constante de Lipschitz de cette dérivée est inférieure ou égale à $1/c$.

(b) Les fonctions J et J_c admettent les mêmes minima :

$$\arg\min_{u \in \mathbb{U}} J(u) = \arg\min_{u \in \mathbb{U}} J_c(u) \ .$$

(c) Si J est fortement convexe, il en est de même de J_c.

Preuve. Voir (Cohen, 2004, Chapitre 4)

On considère alors le problème d'optimisation sans contrainte sous forme standard :

$$(\mathbf{P}) \qquad \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} J(u) \ ,$$

et on note $\chi_{U^{\mathrm{ad}}}$ la fonction caractéristique de l'ensemble U^{ad} :

$$\chi_{U^{\mathrm{ad}}}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in U^{\mathrm{ad}} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \ .$$

Le problème $(\mathbf{P})$ est bien sûr équivalent à :

$$\min_{u \in \mathbb{U}} J(u) + \chi_{U^{\mathrm{ad}}}(u) \ .$$

La régularisée de Moreau-Yosida de la fonction $J + \chi_{U^{\mathrm{ad}}}$ à minimiser dans ce nouveau problème est notée J_c :

$$\begin{aligned} J_c(u) &= \min_{v \in \mathbb{U}} \left(\frac{1}{2c} \|v - u\|^2 + J(v) + \chi_{U^{\mathrm{ad}}}(v) \right) \ , \\ &= \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} \left(\frac{1}{2c} \|v - u\|^2 + J(v) \right) \ , \end{aligned}$$

ce qui montre que l'on a :

$$\arg\min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} J(u) = \arg\min_{u \in \mathbb{U}} J_c(u) \ .$$

Avec cet abus de notation [4], on a les conclusions suivantes :

- plutôt que de minimiser J sur U^{ad}, on peut minimiser J_c sur tout l'espace $\mathbb{U}$;

4. car J_c est ici la régularisée de Moreau-Yosida de $J + \chi_{U^{\mathrm{ad}}}$ et non celle de J

- comme J_c est différentiable à gradient lipschitzien, la minimisation de J_c est plus facile à réaliser que celle de J ;
- de plus, on montre que, si J est fortement convexe de module a à gradient lipschitzien de rapport A, alors J_c est fortement convexe de module $a/(1+ca)$ à gradient lipschitzien de rapport $A/(1+cA)$; le conditionnement de J_c est donc meilleur que celui de J :

$$\frac{A(1+ca)}{a(1+cA)} \leq \frac{A}{a} \leq 1 \ ,$$

  et les algorithmes de minimisation de type gradient sont donc plus efficaces.

On aurait donc intérêt à utiliser systématiquement la régularisée dans le cadre de l'optimisation. . .

Le défaut de la méthode est qu'une unique évaluation de la fonction J_c en un point $u^{(k)}$ est une tâche de complexité équivalente à résoudre le problème d'optimisation initial . . .

Ceci empêche donc d'employer directement cette technique de régularisation [5], à l'exception notable du cas de la dualité et du lagrangien augmenté.

A.3.2 Lagrangien augmenté.

On considère maintenant le problème d'optimisation sous contrainte :

$$\min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} J(u) \quad \text{sous} \quad \Theta(u) \in -C \ ,$$

le lagrangien associé L défini sur $U^{\mathrm{ad}} \times C^{\star}$ par :

$$L(u,p) = J(u) + \langle p \, , \Theta(u) \rangle \ ,$$

ainsi que la fonction duale H définie sur $C^{\star}$ par la relation :

$$H(p) = \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} L(u,p) \ .$$

Le problème dual du problème initial est :

$$\max_{p \in C^{\star}} H(p) \ .$$

On sait que la fonction duale H est concave et sous-différentiable. L'idée fondatrice du lagrangien augmenté est de prendre la régularisée de Moreau-Yosida H_c de la fonction $H - \chi_{C^{\star}}$. On sait alors que maximiser H sur le

5. Il faut cependant noter que l'utilisation de cette régularisation en association avec des techniques d'approximation fait l'objet des méthodes dites proximales, auxquelles est consacrée une abondante et intéressante littérature.

cône $C^\star$ est équivalent à maximiser H_c sur tout l'espace $\mathbb{V}$. L'expression de H_c se calcule :

$$\begin{aligned} H_c(p) &= \max_{q\in\mathbb{V}} \left(H(q) - \chi_{C^\star}(q) - \frac{1}{2c}\left\|q-p\right\|^2 \right) \\ &= \max_{q\in C^\star} \min_{u\in U^{\mathrm{ad}}} \left(J(u) + \langle q\,, \Theta(u)\rangle - \frac{1}{2c}\left\|q-p\right\|^2 \right) \ . \end{aligned}$$

Inversant l'ordre des opérateurs max et min, la relation ci-dessus se met sous la forme :

$$H_c(p) = \min_{u\in U^{\mathrm{ad}}} L_c(u,p) \ ,$$

avec :

$$L_c(u,p) = J(u) + \max_{q\in C^\star} \left(\langle q\,, \Theta(u)\rangle - \frac{1}{2c}\left\|q-p\right\|^2 \right) \ . \tag{A.11}$$

La fonction L_c, définie sur $U^{\mathrm{ad}} \times \mathcal{C}$, est *par définition* le lagrangien augmenté associé au problème.

Remarque A.3. L'inversion des opérateurs min et max est possible car on se met dans le cas convexe-concave : on suppose en efet J et Θ convexes, et la concavité en q résulte de la forme quadratique induite par la régularisation. Il faut cependant noter que le lagrangien augmenté a un champ d'application beaucoup plus vaste, puisqu'il permet de surmonter les sauts de dualité survenant dans le cas non convexe.

L'intérêt théorique du lagrangien augmenté vient du théorème suivant.

Théorème A.4.

(a) Le lagrangien ordinaire L (défini sur $U^{\mathrm{ad}} \times C^\star$) et le lagrangien augmenté L_c (défini sur $U^{\mathrm{ad}} \times \mathbb{V}$) ont les mêmes ensembles de points selle $U^\sharp \times P^\sharp$.

(b) Le lagrangien augmenté L_c est stable :

$$\forall p^\sharp \in P^\sharp \ , \ \ \arg\min_{u\in U^{\mathrm{ad}}} L_c(u,p^\sharp) = U^\sharp \ .$$

Preuve. Voir Cohen (2004).

Avec le lagrangien augmenté, on gagne donc sur tous les tableaux puisque :

– la fonction H_c a de meilleures propriétés de différentiabilité et de conditionnement que la fonction duale H, et sa maximisation en est donc facilitée ;
– l'identité des ensembles de points selle ainsi que la stabilité du lagrangien augmenté font que l'évaluation de H_c en un point $p^\sharp \in P^\sharp$ ne fournit que des éléments de $U^\sharp$, ensemble des solutions du problème initial.

Mais le lagrangien augmenté a aussi un véritable intérêt pratique : en effet, l'opération de maximisation qui sert à le définir peut être effectuée de manière analytique. Définissant la fonction :

$$\zeta_c(\theta, p) = \max_{q \in C^\star} \left(\langle q \, , \theta \rangle - \frac{1}{2c} \|q - p\|^2 \right) \ , \tag{A.12}$$

le lagrangien augmentée défini en (A.11) se met sous la forme :

$$L_c(u, p) = J(u) + \zeta_c\left(\Theta(u), p\right) \ .$$

La maximisation dans (A.12) porte sur une fonction quadratique, et l'arg-max se calcule explicitement :

$$q^\sharp = \mathrm{proj}_{C^\star}\left(p + c\theta\right) \ .$$

Un calcul simple montre alors que l'on a :

$$\begin{aligned} \zeta_c(\theta, p) &= \frac{1}{2c} \left(\left\|q^\sharp\right\|^2 - \|p\|^2 \right) \ , \\ &= \frac{1}{2c} \left(\|\mathrm{proj}_{C^\star}\left(p + c\theta\right)\|^2 - \|p\|^2 \right) \ . \end{aligned}$$

Enfin, à l'aide de résultats classiques de calcul différentiel sur les fonctions résultant d'une opération d'optimisation (voir § A.4), on obtient les expressions des gradients partiels de la fonction ζ_c, à savoir :

$$\begin{aligned} \nabla_p \zeta_c\left(\theta, p\right) &= \frac{1}{c} \left(\mathrm{proj}_{C^\star}\left(p + c\theta\right) - p\right) \ , \\ \nabla_\theta \zeta_c\left(\theta, p\right) &= \mathrm{proj}_{C^\star}\left(p + c\theta\right) \ . \end{aligned}$$

Ainsi, le lagrangien augmenté *ainsi que* ses gradients partiels sont calculés explicitement et l'on a :

$$L_c(u, p) = J(u) + \frac{1}{2c}\Big(\|\mathrm{proj}_{C^\star}\left(p + c\Theta(u)\right)\|^2 - \|p\|^2 \Big) \ , \tag{A.13}$$

$$\nabla_u L_c\left(u, p\right) = J^{'}(u) + \left(\Theta^{'}(u)\right)^\top \mathrm{proj}_{C^\star}\left(p + c\Theta(u)\right) \ , \tag{A.14}$$

$$\nabla_p L_c\left(u, p\right) = \frac{1}{c}\left(\mathrm{proj}_{C^\star}\left(p + c\Theta(u)\right) - p\right) . \tag{A.15}$$

Il n'y a alors plus d'obstacle pour la mise en œuvre pratique du lagrangien augmenté dans des algorithmes de type Uzawa ou Arrow-Hurwicz.

Remarque A.5. Un cas particulier important est le cas où l'on traite des contraintes de type égalité dans $\mathbb{R}^p$:

$$\Theta(u) = 0 \ .$$

Le cône dual est alors l'espace tout entier ($C^\star = \mathbb{R}^p$) et on obtient alors pour le lagrangien augmenté l'expression bien connue :

$$L_c(u,p) = J(u) + \langle p\,, \Theta(u)\rangle + \frac{c}{2}\left\|\Theta(u)\right\|^2 \ .$$

Cette dernière forme explique pourquoi le lagrangien augmenté a parfois été vu par le passé comme un mélange de techniques de *dualité* (terme $\langle p\,, \Theta(u)\rangle$) et de *pénalisation* (terme $\frac{c}{2}\left\|\Theta(u)\right\|^2$). Cette explication est *mauvaise*, comme on peut s'en persuader sur le cas des contraintes inégalités :

$$\Theta(u) \leq 0 \ .$$

Le cône dual est dans ce cas l'orthant positif ($C^\star = \mathbb{R}^p_+$). Un mélange de dualité et de pénalité conduirait alors à un lagrangien (?) de la forme :

$$J(u) + \langle p\,, \Theta(u)\rangle + \frac{c}{2}\left\|\max\left\{\Theta(u), 0\right\}\right\|^2 \ ,$$

et cette dernière expression n'a pas grand chose en commun avec l'expression (A.13) du vrai lagrangien augmenté. Il faut donc interpréter le lagrangien augmenté comme étant le résultat d'une opération de *régularisation* et non d'une opération de *pénalisation*.

A.4 Quelques résultats de différentiabilité

On rassemble ici quelques de propriétés concernant la différentiabilité de fonctionnelles résultant d'opérations d'optimisation. De manière générale, on se donne une fonction F définie sur un produit $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ d'espaces de Hilbert, à valeurs réelles, ainsi qu'une partie convexe fermée Y^{ad} de $\mathbb{Y}$. On s'intéresse aux deux situations suivantes.

- Fonction convexe-concave : on suppose que F est à la fois *convexe* en x et *concave* en y, et on étudie la différentiabilité de la fonction G définie par :
$$G(x) = \max_{y \in Y^{\mathrm{ad}}} F(x,y) \ .$$
- Fonction convexe-convexe : on suppose que F est *conjointement convexe* en (x,y), et on étudie la différentiabilité de la fonction G définie par :
$$G(x) = \min_{y \in Y^{\mathrm{ad}}} F(x,y) \ .$$

On appliquera les résultats obtenus, d'une part à la fonction duale :

$$H(p) = \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} J(u) + \langle p, \Theta(u)\rangle \ ,$$

et d'autre part à la fonction de perturbation :

$$\Phi(v) = \Big\{ \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} J(u) \quad \text{sous} \quad \Theta(u) - v \in -C \Big\} \ .$$

A.4.1 Fonction convexe-concave

Résultat.

Soit $F : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$, et soit Y^{ad} une partie convexe fermée de $\mathbb{Y}$. On suppose que :
(a) $y \mapsto F(x,y)$ est concave s.c.s. pour tout x,
(b) $y \mapsto -F(x,y)$ est coercive sur Y^{ad} pour tout x,
(c) $x \mapsto F(x,y)$ est convexe continue pour tout y,
(d) $x \mapsto F(x,y)$ est sous-différentiable pour tout y.
Alors, la fonction $G : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$G(x) = \max_{y \in Y^{\mathrm{ad}}} F(x,y) \ ;$$

est bien définie, et on note $\widehat{Y}(x)$ l'ensemble des points y réalisant le maximum pour un x donné. De plus, la fonction G est convexe, s.c.i., sous-différentiable sur l'intérieur de son domaine ; en tout point de sous-différentiabilité, le sous-différentiel de G est donné par la relation : [6]

$$\partial G(x) = \overline{\mathrm{co}} \left(\bigcup_{y \in \widehat{Y}(x)} \partial_x F(x,y) \right) .$$

Preuve. Ce résultat est un théorème de type Danskin ; voir Mataoui (1990) pour la démonstration.

Cas particuliers.

Si l'on suppose que la fonction $x \mapsto F(x,y)$ est différentiable, le sous-différentiel de G est donné par :

$$\partial G(x) = \overline{\mathrm{co}} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \big(x, \widehat{Y}(x)\big) \right) .$$

Si on suppose de plus que la fonction $y \mapsto F(x,y)$ est strictement concave, l'ensemble des solutions $\widehat{Y}(x)$ se réduit à un élément unique noté $\hat{y}(x)$. Le sous-différentiel de G est donc lui-même constitué d'un singleton : la fonction G est différentiable et l'on a :

$$\nabla G(x) = \nabla_x F \big(x, \hat{y}(x)\big) .$$

6. où $\overline{\mathrm{co}}(A)$ désigne l'enveloppe convexe fermée d'un ensemble A

Remarque A.6. Tout ce qui vient d'être fait pour la fonction G se transpose sans difficulté à la fonction H définie par :

$$H(y) = \min_{x \in X^{\mathrm{ad}}} F(x, y) \ .$$

Moyennant les hypothèses adéquates, H est concave s.c.s. sur-différentiable sur l'intérieur de son domaine, et le sur-différentiel de H est :

$$\partial H(y) = \overline{\mathrm{co}} \left(\bigcup_{x \in \widehat{X}(y)} \partial_y F(x, y) \right) \ .$$

Lorsque $y \mapsto F(x, y)$ est différentiable et $x \mapsto F(x, y)$ est strictement convexe, H est différentiable :

$$\nabla H(y) = \nabla_y F \left(\hat{x}(y), y \right) \ .$$

Application à la fonction duale.

Dans le cas du lagrangien $L(u, p) = J(u) + \langle p, \Theta(u) \rangle$, avec les hypothèses habituelles sur J et Θ, on déduit de ce qui précède que la fonction duale H est sous-différentiable et que l'on a :

$$\partial H(p) = \overline{\mathrm{co}} \Big(\Theta \big(\widehat{U}(p) \big) \Big) \ .$$

La différentiabilité de H dépend ensuite de la stricte convexité de J.

A.4.2 Fonction convexe-convexe

Résultat.

Soit $F : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$, et soit Y^{ad} une partie convexe fermée de $\mathbb{Y}$. On suppose que :
(a) $(x, y) \mapsto F(x, y)$ est convexe s.c.i.,
(b) $y \mapsto F(x, y)$ est coercive sur Y^{ad} pour tout x.
(c) $\forall x_0 \in \mathbb{X}$, $\exists y_0 \in Y^{\mathrm{ad}}$, $x \mapsto F(x, y_0)$ est continue en x_0,
(d) $\exists x_0 \in \mathbb{X}$, $\mathrm{dom} F(x_0, .) \cap \mathrm{int} Y^{\mathrm{ad}} \neq \emptyset$.
Alors, la fonction $G : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$G(x) = \min_{y \in Y^{\mathrm{ad}}} F(x, y) \ ;$$

est bien définie, et on note $\widehat{Y}(x)$ l'ensemble des points y réalisant le minimum pour un x donné. De plus, la fonction G est convexe, continue, sous différentiable et l'on a pour tout $x \in \mathbb{X}$:

$$\partial G(x) \ \subset \ \bigcap_{\hat{y} \in \widehat{Y}(x)} \partial_x F(x, \hat{y}) \ .$$

Preuve. Les conditions de convexité, de semi-continuité et de coercivité assure que la fonction G soit bien définie et que l'ensemble $\widehat{Y}(x)$ soit non vide. Le fait que G soit convexe résulte de la convexité conjointe de F en x et y.
La fonction $x \mapsto F(x, y_0)$ étant continue en x_0, on en déduit que la fonction G est majorée par une constante finie sur un voisinage de x_0 et qu'elle est donc continue et sous-différentiable en x_0 (propriété des fonctions convexes). Ceci étant vrai pour tout x_0, on en conclut que G est continue sous différentiable [7].
Soit $x \in \mathbb{X}$, soit $\hat{y} \in \widehat{Y}(x)$ et soit $r \in \partial G(x)$. On a :

$$\begin{aligned}
\langle r, x\rangle &= G(x) + G^\star(r) \\
&= F(x,\hat{y}) + \sup_{z\in\mathbb{X}} \Big(\langle r, z\rangle - G(z)\Big) \\
&= F(x,\hat{y}) + \sup_{z\in\mathbb{X},\ y\in Y^{\mathrm{ad}}} \Big(\langle r, z\rangle - F(z,y)\Big) \\
&= F(x,\hat{y}) + \sup_{z\in\mathbb{X},\ y\in\mathbb{Y}} \Big(\langle r, z\rangle - F(z,y) - \chi_{Y^{\mathrm{ad}}}(y)\Big) \\
&= F(x,\hat{y}) + \chi_{Y^{\mathrm{ad}}}(\hat{y}) + \sup_{z\in\mathbb{X},\ y\in\mathbb{Y}} \Big(\langle (r,0), (z,y)\rangle - \big(F(z,y) + \chi_{Y^{\mathrm{ad}}}(y)\big)\Big) \\
&= \Psi(x,\hat{y}) + \Psi^\star(r,0)\ ,
\end{aligned}$$

avec la définition : $\Psi(x,y) = F(x,y) + \chi_{Y^{\mathrm{ad}}}(y)$. On en déduit que :

$$(r,0) \in \partial\Psi(x,\hat{y})\ .$$

L'hypothèse (d) impliquant l'égalité entre $\partial(F + \chi_{Y^{\mathrm{ad}}})$ et $\partial F + \partial\chi_{Y^{\mathrm{ad}}}$ [8], on en déduit :

$$\forall r \in \partial G(x),\ \forall \hat{y} \in \widehat{Y}(x),\ \exists -t \in \partial\chi_{Y^{\mathrm{ad}}}(\hat{y}) \text{ tel que } (r,t) \in \partial F(x,\hat{y})\ ,$$

et donc que $r \in \partial_x F(x,\hat{y})$ pour tout $\hat{y} \in \widehat{Y}(x)$ et pour tout $r \in \partial G(x)$. On en déduit le résultat annoncé.

Remarque A.7. À la suite des deux remarques de bas de page faites durant la démonstration précédente, on peut remarquer que, si l'on remplace les hypothèses (c) et (d) par l'hypothèse :

(c') $\exists (x_0, y_0) \in \mathbb{X} \times Y^{\mathrm{ad}}$, tel que F est continue en (x_0, y_0),

le résultat est conservé sur l'intérieur du domaine de G.

7. L'hypothèse « $\exists x_0 \in \mathbb{X},\ \exists y_0 \in Y^{\mathrm{ad}},\ x \mapsto F(x, y_0)$ est continue en x_0 » est suffisante pour obtenir la continuité puisque G est alors continue en x_0, et est donc continue et sous-différentiable sur l'intérieur de son domaine.

8. une hypothèse de continuité de F en (x_0, y_0) avec $y_0 \in Y^{\mathrm{ad}}$ fournirait aussi cette égalité ...

Cas particulier.

Si l'on suppose que la fonction $x \mapsto F(x,y)$ est différentiable, le sous-différentiel de G est une intersection de singletons ; G est donc différentiable et l'on a :
$$\forall\, \hat{y}(x) \in \widehat{Y}(x) \;, \quad \nabla G(x) = \nabla_x F\big(x, \hat{y}(x)\big) \;.$$

Application à la fonction de perturbation.

On considère la fonction :

$$\begin{aligned} F(u,v,p) &= J(u) + \langle p, \Theta(u) - v \rangle \\ &= L(u,p) - \langle p, v \rangle \;. \end{aligned}$$

On fait les hypothèses habituelles garantissant l'existence de points selle pour le lagrangien L associé au problème d'optimisation sous-jacent. Alors, F est continue, conjointement convexe en (u,v), coercive et différentiable en u. Suivant les résultats obtenus pour une fonction convexe-convexe, on conclut que la fonction :
$$G(v,p) = \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} F(u,v,p) \;,$$
est convexe continue différentiable en v et l'on a :

$$\nabla_v G(v,p) = -p \;.$$

De plus, G est concave s.c.s. en p en tant qu'enveloppe inférieure de fonctions affines continues de la variable p (en fait, G s'exprime directement en fonction de la fonction duale : $G(v,p) = H(p) - \langle p, v \rangle$). On satisfait donc les hypothèses du cas d'une fonction convexe-concave et l'on en déduit que la fonction :

$$\Phi(v) = \max_{p \in C^\star} G(v,p) \;,$$

est sous-différentiable et que son sous-différentiel est :

$$\begin{aligned} \partial\Phi(v) &= \overline{\mathrm{co}} \left(\frac{\partial G}{\partial v}(v, \widehat{P}(v)) \right) \\ &= -\overline{\mathrm{co}} \left(\widehat{P}(v) \right) \;. \end{aligned}$$

La fonction Φ ainsi définie est exactement la fonction de perturbation du problème d'optimisation initial, car avec les hypothèses assurant l'existence de points selle, on a :

$$\begin{aligned} \Phi(v) &= \max_{p \in C^\star} \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} J(u) + \langle p, \Theta(u) - v \rangle \\ &= \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} \max_{p \in C^\star} J(u) + \langle p, \Theta(u) - v \rangle \\ &= \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} J(u) \quad \text{sous} \quad \Theta(u) - v \in -C \;. \end{aligned}$$

En $v = 0$, utilisant le fait que l'ensemble $P^\sharp$ regroupant la deuxième composante des points selle du lagrangien est convexe fermé, on en déduit que le sous-différentiel de la fonction de perturbation est donné par la relation :

$$\partial\Phi(0) = -P^\sharp \ .$$

C'est cette relation qui permet d'avoir "l'interprétation marginaliste des multiplicateurs".

Remarque A.8. Si on cherche à étudier directement la différentiabilité de la fonction de perturbation en posant :

$$G(u,v) = \begin{cases} J(u) & \text{si } \Theta(u) - v \in -C \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} ,$$

soit encore :

$$G(u,v) = J(u) + \chi_E(u,v) \ ,$$

avec $E = \big\{(u,v) \in \mathbb{U} \times \mathbb{V},\ \Theta(u) - v \in -C\big\}$, on constate que la fonction G ainsi définie est bien convexe s.c.i. et que la fonction de perturbation se met bien sous la forme :

$$\Phi(v) = \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} G(u,v) \ .$$

On a donc l'inclusion suivante :

$$\partial\Phi(0) \ \subset \bigcap_{u^\sharp \in U^\sharp} \partial_v G(u^\sharp, 0) \ .$$

Cependant, la présence dans la définition de G d'une fonction caractéristique d'ensemble fait que l'application directe du résultat concernant les fonctions convexe-convexe ne présente pas d'intérêt.

À titre d'exemple, pour le problème :

$$\min_{u \in \mathbb{R}} u^2 \ ,$$

sous la contrainte :

$$u + 1 \leq 0 \ ,$$

dont l'ensemble des points selle $U^\sharp \times P^\sharp$ se réduit au point $(-1, 2)$, on a :

$$G(u,v) = \begin{cases} u^2 & \text{si } u + 1 - v \leq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} .$$

On en déduit immédiatement que :

$$\Phi(v) = \begin{cases} (v-1)^2 & \text{si } v \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

On vérifie que l'on a bien :

$$\partial \Phi(0) = -P^\sharp = \{-2\} \ .$$

Par ailleurs, on a :

$$G(-1,v) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \ \ v < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \ ,$$

de telle sorte que :

$$\partial_v G(-1,0) = \bigcap_{u^\sharp \in U^\sharp} \partial_v G(u^\sharp, 0) = \mathbb{R}^- \ .$$

Le calcul de $\partial_v G(-1,0)$ donne ainsi très peu d'information sur le sous-différentiel $\partial \Phi(0)$.